Olympiadeklassen **11–12**

63. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

© 2023 *Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

631211

Für eine natürliche Zahl n sei $P(n)$ das Produkt ihrer von 0 verschiedenen Ziffern.

Beispielsweise ist also $P(2023) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Man ermittle, wie viele vierstellige Zahlen n mit der Eigenschaft $P(n) = 12$ existieren.

631212

Man bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

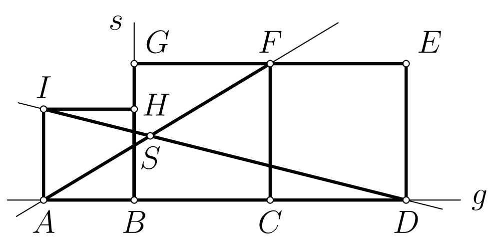
$$x + |y + 1| = 1\,, \qquad (1)$$
$$y + |z + 2| = 1\,, \qquad (2)$$
$$z + |x - 2| = 1 \qquad (3)$$

im Bereich der reellen Zahlen.

631213

Die neun Punkte A, B, C, D, E, F, G, H und I bilden drei Quadrate $ABHI$, $BCFG$ und $CDEF$, wobei die vier Punkte A, B, C und D in dieser Reihenfolge auf einer Geraden g und G, H auf einem gemeinsamen Strahl s mit dem Anfangspunkt B liegen (siehe Abbildung A 631213). Die Geraden AF und DI schneiden sich im Punkt S.

Man ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle ASD$.



A 631213

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

<u>631214</u>

Anna und Bea spielen ein Spiel mit Stapeln von schwarzen, roten und grünen Spielsteinen.

Zu Beginn des Spiels befinden sich k Stapel von je einem schwarzen Spielstein auf dem Spielfeld, wobei k eine beliebige positive ganze Zahl ist.

Die Spielerinnen sind abwechselnd am Zug. Anna beginnt. Dabei gibt es zwei erlaubte Züge:

(1) Einen roten oder grünen Spielstein (aus einem ausreichend großen Vorrat) auf einen vorhandenen Stapel legen. Dabei dürfen nach dem Zug keine zwei Spielsteine gleicher Farbe im gleichen Stapel liegen. Ein Stapel kann also nur aus höchstens drei Spielsteinen bestehen.

(2) Zwei Stapel aus dem Spiel entfernen, wobei die obersten Spielsteine der beiden Stapel die gleiche Farbe haben müssen. Die Höhe kann unterschiedlich sein.

Es hat verloren, wer nicht mehr ziehen kann.

Man entscheide

a) für sechs Stapel ($k = 6$),

b) für eine beliebige gerade Anzahl $k \geq 2$ von Stapeln,

ob eine der beiden Spielerinnen so spielen kann, dass sie den Sieg erzwingen kann, und gebe gegebenenfalls eine solche Gewinnstrategie an.